

# スペクトル狭帯化によるフーリエ変換法の ダイナミックレンジ拡大<sup>†</sup>

中山 繁, 鳥羽英光, 藤原直樹, 玄間隆志, 武田光夫

## Dynamic Range Expansion of Fourier-Transform Method by Spectrum-Narrowing

Shigeru NAKAYAMA, Hidemitsu TOBA, Naoki FUJIWARA, Takashi GEMMA and Mitsuo TAKEDA

フーリエ変換法において、位相分布の勾配が大きいフリンジパターンの解析を可能にするモデルベースのフリンジ解析技術を提案する。従来のフーリエ変換法では、大きな位相分布の勾配によって広がったフーリエスペクトルを空間キャリア周波数によって分離することができないため、測定可能な位相分布のダイナミックレンジが制限されていた。提案するモデルベースの反復手法は、広がったスペクトルを効果的に狭め、位相解析誤差を低減する。実験とシミュレーションにより、提案したスペクトル狭帯化技術の有効性を実証した。

In this study, a model-based fringe analysis technique is proposed for analyzing fringe patterns with large phase slopes using the Fourier-transform method. In the conventional Fourier-transform method, the dynamic range of the measurable phase distribution is limited because the Fourier spectra broadened by large phase slopes cannot be separated by the spatial carrier frequency. Our model-based iterative technique effectively narrows the broad spectrum and reduces phase analysis errors. Experiment and simulation results are presented to demonstrate the feasibility of the proposed spectrum-narrowing technique.

**Key words** シングルショットフリンジ解析, 干渉法, フリンジ投影法, フーリエ変換法  
single-shot fringe analysis, interferometry, fringe-projection profilometry, Fourier-transform method

### 1 はじめに

フーリエ変換法 (FTM) [1], [2] は、光学計測におけるシングルショットフリンジ解析の有用な手法であり、干渉法 [3] やフリンジ投影法 [4] などに広く使用されている。FTM は空間キャリアをフリンジパターンに導入し、そのフーリエスペクトルを信号スペクトル、共役スペクトル、および DC 成分に分離する。位相分布は、その分離された信号スペクトルのバンドパスフィルタリングとそれに続く逆フーリエ変換によって得られた複素解析信号から求められる。1 枚のフリンジデータから位相分布が求まるので、振動などの外乱が存在する環境下での測定や高速現象の測定などに応用されている [5]。

その一方で、FTM では測定可能な位相分布のダイナミックレンジが制限されてしまう。空間キャリア周波数に比べて位相分布の勾配が大きい場合、信号スペクトルとその共役スペクトルの帯域幅が広くなり、3つのスペクトル成分が重なり合ってしまう。その結果、フィルタリングによっ

て信号スペクトルを完全に分離・抽出することができなくなり、大きなリップル状の位相解析誤差が発生してしまう。例えば、計算機ホログラム (CGH) などの非球面波を球面波あるいは平面波に変換する素子を使用せずに、従来の球面測定用の干渉計で非球面テストを行うときに上記のような状況が発生する。

本稿では、大きな勾配を持つ位相分布に対処するための初期の研究成果 [6] をさらに進め、位相変調フリンジのフーリエスペクトルの帯域幅を効果的に狭めることによって FTM のパフォーマンスを向上させる新しいモデルベースの手法を提案する。この手法は反復アルゴリズムに基づいており、従来の FTM よりも解析可能な位相分布のダイナミックレンジを広げることができる。不均一なフリンジが発生する状態で行った球面テストの干渉計実験により本提案の有効性を実証し、非球面テストを想定したシミュレーションによって極めて勾配が大きい位相分布への適用可能性を示す。

<sup>†</sup> 本稿は、引用文献 [10] をもとに図や説明を追加したものである。実験検証において、データ解析途中のスペクトルの図とフィルター条件を変更したときの解析誤差を追記した。仮想インターフェログラム法の適用手順に関する説明を追記した。

## 2 スペクトル狭帯化FTM

空間キャリアを導入したフリンジパターンの強度分布は次のように記述できる。

$$I(x, y) = a(x, y) + b(x, y) \cos[\phi(x, y)] \quad (1)$$

$$\phi(x, y) = 2\pi(f_x x + f_y y) + \phi_s(x, y) \quad (2)$$

ここで、 $\phi_s(x, y)$ は位相分布であり、 $a(x, y)$ 、 $b(x, y)$ はそれぞれバックグラウンドとエンベロープの強度分布を表し、 $f_x$ と $f_y$ は導入した空間キャリアの周波数である。照明がほぼ均一で、均一な反射率の研磨された表面をテストするときのようなバックグラウンドとエンベロープがほぼ一定であると見なせる場合を想定する。この場合、位相分布 $\phi_s(x, y)$ がフリンジスペクトルの広がり の主な原因になる。本提案では、モデル化した位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x, y)$ を反復アルゴリズムで使用して、広がったスペクトルを狭帯化することによって解析可能な位相分布のダイナミックレンジを拡大する。

問題設定としては、ブラインドテストと呼ばれる位相分布に関する事前情報がないケースと、設計データから理想的な位相分布が事前にわかっているケースに分けられる。Fig. 1のフローチャートとFig. 2に模式的に示したデータ例を参照して、アルゴリズムの各ステップを説明する。

まず、ステップ1～ステップ4の反復処理に入る前に、フリンジパターンからDC成分 $a(x, y)$ を削除する。

$$I_1(x, y) = \frac{1}{2} b(x, y) \exp[2\pi i(f_x x + f_y y) + i\phi_s(x, y)] + \frac{1}{2} b(x, y) \exp[-2\pi i(f_x x + f_y y) - i\phi_s(x, y)] \quad (3)$$

バックグラウンドがほぼ一定という条件から、 $a(x, y)$ のフーリエスペクトルはスペクトル領域の中心の狭い範囲に現れ、狭いDC除去フィルターによって除去することができる。理想的にはこのフィルタリング操作は信号スペクトルをそのまま維持する必要があるが、位相分布の勾配が非常に大きく、信号スペクトル（および共役スペクトル）が除去帯域内へ広がる場合には、スペクトルのごく一部がDC除去フィルターによって失われてしまう。

### ステップ1：モデル位相分布の生成

反復処理の初回において、位相分布に関する事前情報がないブラインドテストの場合は、Fig. 2(a)に示すような取得されたフリンジパターンを通常のFTMで解析する。滑らかで連続的な位相分布でさえ、大きな勾配がある場合にはFig. 2(b)のような広いスペクトルを持ち、フィルタリングによって信号スペクトルを完全に分離・抽出することができなくなり、大きなリップル状の位相解析誤差が発生してしまう。そこで、検出された位相分布を第36項までのZernike多項式 [7] などの滑らかな2次元多項式でフィッ

ティングすることによってモデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x, y)$ を推定する。このフィッティングプロセスによってリップル状の大きな変動が排除され、モデル位相分布のより良い初期値として機能する。設計データから理想的な位相分布が事前にわかっている場合は、反復処理の初回ではその位相分布をモデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x, y)$ に設定すればよい。位相分布の事前情報がある場合もない場合も、反復処理の2回目からは前のラウンドのステップ4で得られた位相分布の推定値 $\phi'_s(x, y)$ に2次元多項式フィッティングを施し、新しいモデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x, y)$ を生成する。

### ステップ2：共役スペクトル狭帯化・除去

次に、式(3)のフリンジパターン $I_1(x, y)$ に $\exp[i\phi_{MODEL}(x, y)]$ を乗算する。ここで、 $\phi_{MODEL}(x, y)$ は、

$$\phi_{MODEL}(x, y) = 2\pi(f_x x + f_y y) + \phi_{s,MODEL}(x, y) \quad (4)$$

であり、 $\phi_{s,MODEL}(x, y)$ は、真の位相分布 $\phi_s(x, y)$ の推定値としてステップ1で生成したモデル位相分布である。結果として得られる複素振幅分布 $I_2(x, y)$ は、おおよそ以下に示す第1項と第2項の和で表される。

第1項：

$$\frac{1}{2} b(x, y) \exp[4\pi i(f_x x + f_y y) + i\phi_s(x, y) + i\phi_{s,MODEL}(x, y)]$$

第2項：

$$\frac{1}{2} b(x, y) \exp[-i\phi_s(x, y) + i\phi_{s,MODEL}(x, y)]$$

モデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x, y)$ が真の位相分布 $\phi_s(x, y)$ に近い場合、第2項（共役スペクトルに対応）の位相成分はほぼキャンセルされ、Fig. 2(c)に示すように、そのスペクトルは狭くなり、孤立する。したがって、不要な共役スペクトルを狭い除去フィルターで除去でき、信号スペクトルへの漏れを減らすことができる。共役スペクトル除去後の複素振幅分布は、おおよそ第1項で表される。このプロセスは、設計値に基づいて製作したCGHを用いて非球面波を球面波あるいは平面波に変換することによって非球面形状を計測する手法に概念的に類似している [8]。

### ステップ3：信号スペクトル狭帯化・抽出

次に、残った位相分布（第1項）に $\exp[-2i\phi_{MODEL}(x, y)]$ を乗算する。結果として得られる複素振幅分布 $I_3(x, y)$ は、おおよそ次式で表される。

$$I_3(x, y) \approx \frac{1}{2} b(x, y) \exp[i\phi_s(x, y) - i\phi_{s,MODEL}(x, y)] = \frac{1}{2} b(x, y) \exp[i\Delta\phi_s(x, y)] \quad (5)$$

$$\Delta\phi_s(x, y) = \phi_s(x, y) - \phi_{s,MODEL}(x, y) \quad (6)$$

Fig. 2(d)に示すように $I_3(x, y)$ のスペクトルが狭くなるた

め、適切な帯域幅でフィルタリングして信号スペクトルを抽出することができる。

ステップ4：位相分布の算出

抽出した信号スペクトルに逆フーリエ変換を施すことで、 $\Delta\phi_s(x,y)$ を小さな誤差で求めることができる。求めた位相分布とモデル位相分布の差分形状を $\Delta\phi'_s(x,y)$ とすると、位相分布の推定値 $\phi'_s(x,y)$ は式(7)で算出される。

$$\phi'_s(x,y) = \Delta\phi'_s(x,y) + \phi_{s,MODEL}(x,y) \quad (7)$$

このプロセスは、非球面テストのヌルテストに類似しており、モデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x,y)$ の導入はCGHによる波面変換と同様な役割を果たしている。

繰り返し記載することになるが、次の反復ラウンドのス

テップ1では、ステップ4で得られた推定値 $\phi'_s(x,y)$ に2次元多項式フィッティングを施し、新しいモデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x,y)$ を生成する。続けて、更新したモデル位相分布 $\phi_{s,MODEL}(x,y)$ を用いてステップ2~4を実行する。このような反復ラウンドを推定値 $\phi'_s(x,y)$ が収束するまで繰り返す。

### 3 実験検証

本手法の有効性を確かめるため、フィゾー干渉計を用いた球面テストで実験評価を行った。実験系の配置を Fig. 3 (a) に示す。被検面を光軸に沿ってシフトした上で傾斜させ、Fig. 3 (b) に示した歪んだ干渉縞を形成した。データウィンドウは $N=512$ の正方形で、キャリア周波数 $f_x, f_y$ を約50サイクルに設定した。位相分布は主に $5.4 \lambda PV$ のデフォーカス成分であった。この実験ではブラインドテストとして解析を行い、初期モデル位相分布には、通常のFTMで得られた位相分布に36項までのZernike多項式でフィッティングを施したものを用いた。DC成分および共役スペクトルの除去フィルターは半径10サイクルの円形阻止フィルターとし、信号スペクトルの抽出フィルターは半径50サイクルの円形の通過フィルターとした。ステップ2で共役スペクトルを狭帯化した状態を Fig. 3 (c) に、共役スペクトルを除去した後にステップ3で信号スペクトルを狭帯化した状態を Fig. 3 (d) に示す。今回の実験ではステップ1~ステップ4の反復は3回で収束した。

真の位相分布がわからないため、別途位相シフト法で同

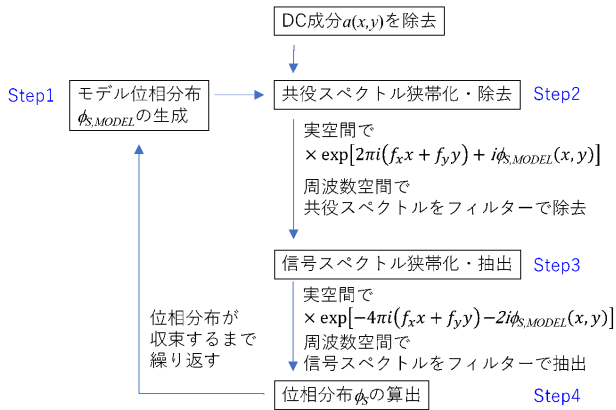


Fig. 1 アルゴリズム

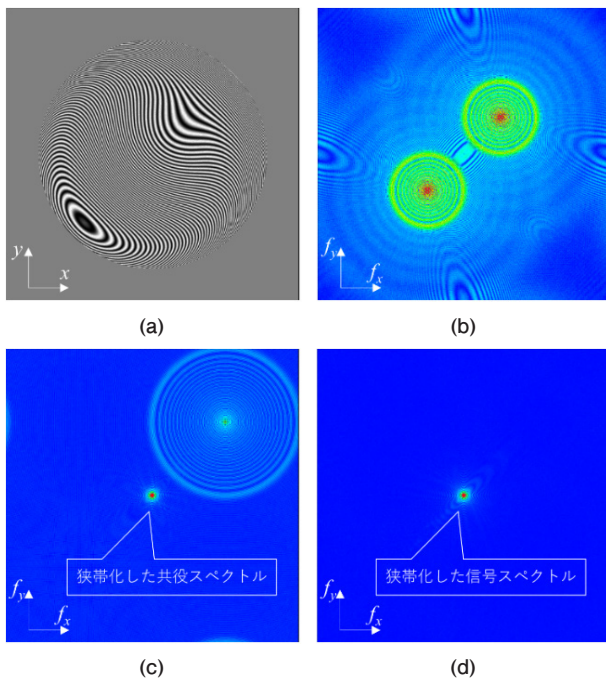


Fig. 2 (a) 干渉縞の例 $I_1(x,y)$ , (b)  $I_1(x,y)$  のフーリエスペクトル, (c) ステップ2における $I_2(x,y)$  のフーリエスペクトル, (d) ステップ3における $I_3(x,y)$  のフーリエスペクトル

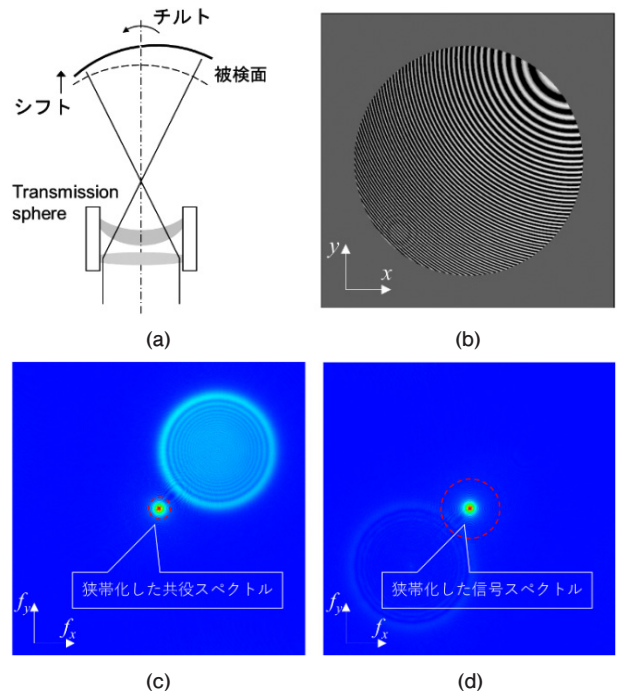


Fig. 3 (a) 光学系模式図, (b) 干渉縞, (c) ステップ2における $I_2(x,y)$  のフーリエスペクトル, (d) ステップ3における $I_3(x,y)$  のフーリエスペクトル



じ被検面の測定を行い、その測定結果を真の位相分布とみなして各手法の解析誤差を算出した。通常のFTMとスペクトル狭帯化手法の解析誤差をそれぞれ Fig. 4 (a) と Fig. 4 (b) に示した。通常のFTMの解析においても半径50サイクルの円形の通過フィルターを用いた。また、これらのFTMの帯域幅に適合させるために位相シフト法のデータに対して同じ帯域のローパスフィルターを施している。通常のFTMでは25.4 mλRMSの大きな誤差が見られるが、スペクトル狭帯化手法では誤差は1.9 mλRMSまで減少した。スペクトル狭帯化手法によって大幅に解析誤差は改善したが、Fig. 4 (b) の右上に誤差が残っていることがわかる。なお、DC成分と共役スペクトルの除去フィルターのサイズを半径20サイクルにすると解析誤差は3.6 mλRMSまで増加した。適切なフィルターサイズを選定することが必要である。

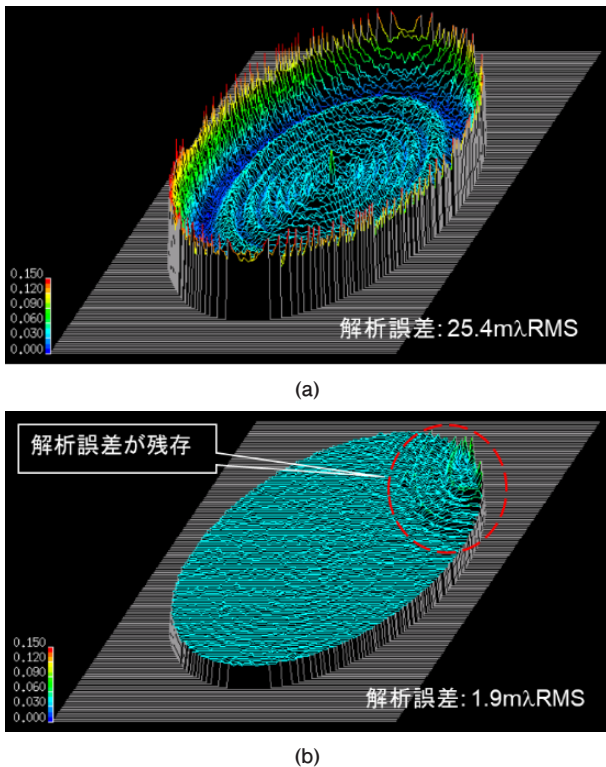


Fig. 4 (a) 通常のFTMでの解析誤差, (b) スペクトル狭帯化手法での解析誤差

次に、仮想インターフェログラム法 (VIM) と呼ばれる手法 [9] を組合わせて、この残留誤差を低減することを試みた。VIMは、位相分布、エンベロープおよびバックグラウンドの強度分布を設定し、式 (1) および式 (2) に従って数値的に作成した仮想インターフェログラムを解析することによって解析誤差を推定し、補正を施すものである。Fig. 5 を用いてVIMの適用手順を説明する。まず、スペクトル狭帯化手法を用いてデータを解析して位相分布を求める。次に、求めた位相分布を用いて仮想インターフェログラムを作成し、それをスペクトル狭帯化手法で解析し、スペクトル狭帯化手法で発生する解析誤差を推定する。最後

に、データをスペクトル狭帯化手法で解析して得られていた位相分布から推定した解析誤差を減算補正する。

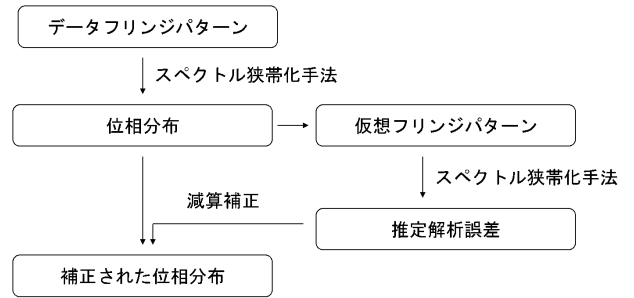


Fig. 5 スペクトル狭帯化手法とVIMの組合せ

Fig. 6 (a) にVIMを組合わせたときの解析誤差を示した。VIMを適用することで Fig. 4 (b) に残っていたリップル形状の誤差が半分に減少した。解析結果の様子を詳細に調べるため、Fig. 6 (a) の点線に沿った位相分布のプロファイルを示した。Fig. 6 (b) に示した。スペクトル狭帯化手法とVIMの組合せで得られた位相分布が位相シフト法で得られた位相分布と概ね一致しており、この提案手法が高周波成分の形状を解析でき、製造誤差などを評価できることを示しているが、低周波数領域には小さな解析誤差が残っていることもわかる。

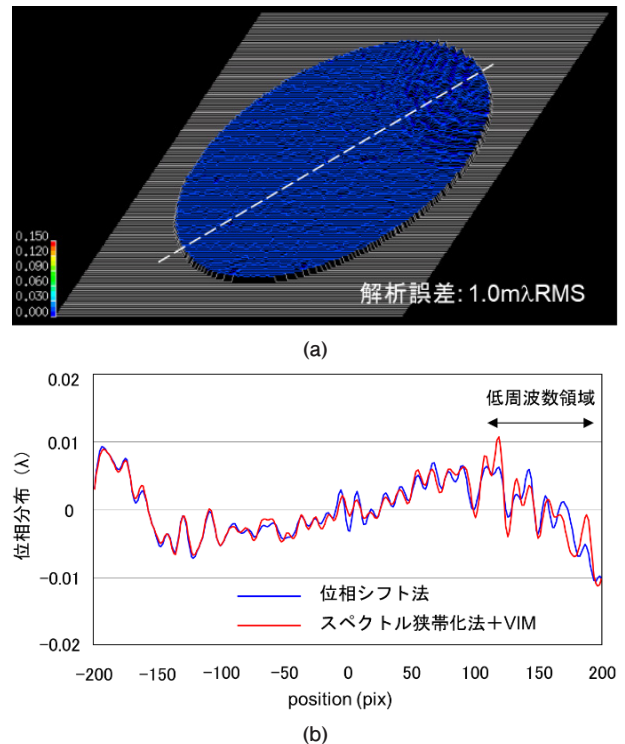


Fig. 6 (a) スペクトル狭帯化手法とVIMを組合わせたときの解析誤差, (b) 各手法で得られた位相分布の断面図

## 4 非球面テストのシミュレーション

CGHなどの専用の波面変換素子を用いずに非球面テストを行う場合を考え、そのようなケースへの適用可能性を調

べるために数値シミュレーションを実施した。従来の球面をテストするための干渉計を想定し、設計形状を  $15.0 \mu\text{PV}$  の大きさの Zernike 多項式の第9項で表される形状とし、製造された表面形状を  $16.5 \mu\text{PV}$  の大きさの Zernike 多項式の第9項で表される形状とした。Fig. 7 (a) に、製造された表面形状に対してシミュレートした干渉縞を示す。45度方向の空間キャリア周波数を与えた高密度干渉縞であり、閉じた縞から予想されるように空間キャリア周波数はこの大きな位相分布に対して十分に高くはなく、干渉縞の信号スペクトルと共役スペクトルは Fig. 7 (b) に示すように大きくオーバーラップしている。

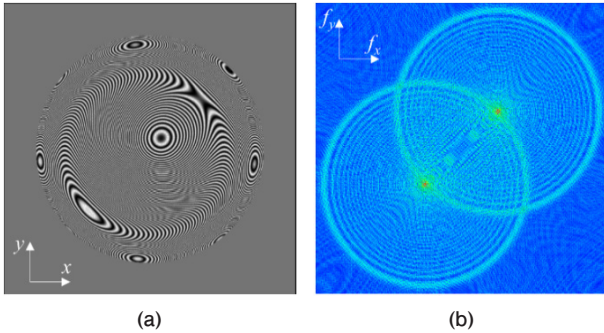


Fig. 7 (a) シミュレートした干渉縞, (b) 干渉縞のフーリエスペクトル

このシミュレーションでは、モデル位相分布の初期値に設計データを採用し、ステップ2で共役スペクトルを狭め、ステップ3で信号スペクトルを狭めて所定の解析を行った。ステップ2で共役スペクトルを狭めた後のスペクトルを Fig. 8 (a) に、さらに共役スペクトルを除去した後にステップ3で狭めた信号スペクトルを Fig. 8 (b) に示す。

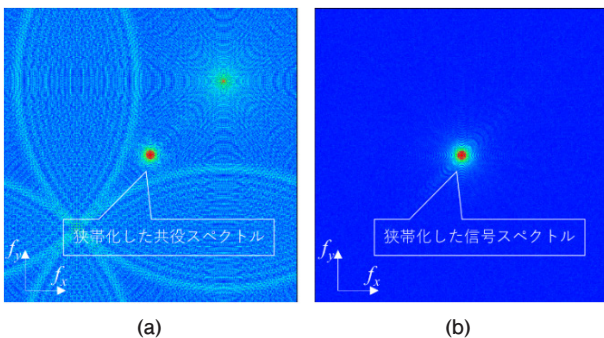


Fig. 8 (a) ステップ2におけるフーリエスペクトル, (b) ステップ3におけるフーリエスペクトル

Fig. 9 (a), (b) に示すように、通常のFTMでは解析できなかったが、スペクトル狭帯化手法とVIMを組み合わせることで  $1.6 \text{ m}\lambda\text{RMS}$  の誤差で解析できた。

## 5 まとめ

大きな勾配を持つ位相分布に対するFTMの解析誤差を

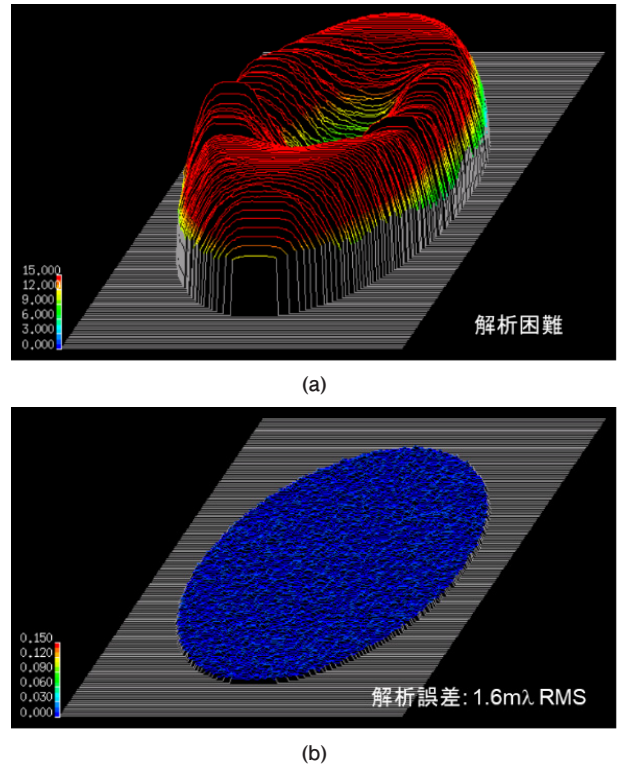


Fig. 9 (a) 通常のFTMでの解析誤差, (b) スペクトル狭帯化手法とVIMを組合せたときの解析誤差

減らすために、スペクトル帯域幅を狭めるモデルベースの手法を提案した。フィゾー干渉計を用いた歪んだ干渉縞の解析実験では、従来のFTMに対して解析誤差が10分の1以下に低減し、提案した手法の有効性を確認できた。さらに、非球面テストを想定した数値シミュレーションにより、従来のFTMでは解析できなかった極めて不均一なフリンジパターンを解析できることを示した。スペクトル狭帯化手法が、FTMで解析可能な位相分布のダイナミックレンジを拡大し、大きな振動や乱気流が存在する環境での測定、高速現象の瞬時測定などで新しい可能性を開くことを期待している。

## 引用文献

- [1] M. Takeda, H. Ina, and S. Kobayashi, "Fourier-transform method of fringe-pattern analysis for computer-based topography and interferometry," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 72, no. 1, pp. 156-160, 1982.
- [2] M. Takeda and K. Mutoh, "Fourier-transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes," *Appl. Opt.*, vol. 22, no. 24, pp. 3977-3982, 1983.
- [3] M. Takeda, "Spatial-carrier fringe pattern analysis and its applications to precision interferometry and profilometry: an overview," *Ind. Metrol.*, vol. 1, no. 2, pp. 79-99, 1990.
- [4] X. Su and W. Chen, "Fourier transform profilometry: a review," *Opt. Lasers Eng.*, vol. 35, no. 5, pp. 263-284, 2001.
- [5] M. Takeda, "Fourier fringe analysis and its application to

- metrology of extreme physical phenomena: a review,” *Appl. Opt.*, vol. 52, no. 1, pp. 20–29, 2013.
- [6] S. Nakayama, H. Toba, N. Fujiwara, T. Gemma, and M. Takeda, “Fourier-transform method with high accuracy by use of iterative technique narrowing the spectra of a fringe pattern,” in *Fringe 2009: 6th International Workshop on Advanced Optical Metrology*, W. Osten and M. Kujawinska, eds.: Springer, 2009, pp. 106–111.
- [7] E. P. Goodwin and J. C. Wyant, *Field Guide to Interferometric Optical Testing*. SPIE Press, 2006, p. 24.
- [8] D. Malacara, M. Servin, and Z. Malacara, *Interferogram Analysis for Optical Testing*, 2nd ed.: CRC Press, 2005, Chap. 8, pp. 416–418.
- [9] H. Toba, Z. Liu, S. Udagawa, N. Fujiwara, S. Nakayama, T. Gemma, and M. Takeda, “Phase analysis error reduction in the Fourier transform method using a virtual interferogram,” *Opt. Eng.*, vol. 58, no. 8, 084103, 2019.
- [10] S. Nakayama, H. Toba, N. Fujiwara, T. Gemma, and M. Takeda, “Enhanced Fourier-transform method for high-density fringe analysis by iterative spectrum narrowing,” *Appl. Opt.*, vol. 59, no. 29, pp. 9159–9164, 2020.

---

中山 繁 Shigeru NAKAYAMA  
研究開発本部 光技術研究所  
Optical Research Laboratory  
Research & Development Division

鳥羽英光 Hidemitsu TOBA  
研究開発本部 光技術研究所  
Optical Research Laboratory  
Research & Development Division

藤原直樹 Naoki FUJIWARA  
生産本部 設備技術開発部  
Equipment Engineering Department  
Production Technology Division

玄間隆志 Takashi GEMMA  
光学本部 開発戦略部  
Strategic Technology Development  
Department Optical Engineering Division

武田光夫 Mitsuo TAKEDA  
宇都宮大学  
Utsunomiya University